

ЗАДАЧА ФУР'Є ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

© С.П. ЛАВРЕНЮК, Н.П. ПРОЦАХ

Краков, Польща, Львов, Україна

Ультрапараболічні рівняння виникають при дослідженні теорії броунівського руху, марківських дифузійних процесів, розсіюванні електронів, кінетичній теорії, в біології, теорії бінарних електролітів, теорії сповільнення електронів, теорії ймовірності [1-3] та інших областях науки. Вперше рівняння такого типу ввів А.Н.Колмогоров [3] для опису неізотропних процесів. Пізніше різноманітні задачі для ультрапараболічних рівнянь досліджувалися багатьма авторами [3-15]. Зокрема, в [4-6] доведено існування єдиного розв'язку задачі Коші з використанням властивостей фундаментальних розв'язків ультрапараболічних рівнянь, у [7,8] подано інтегральне зображення розв'язків таких задач.

Задачі без початкових умов для параболічних рівнянь вивчені у [16-18]. В [17-18] отримано розв'язність таких задач у просторах Гельдера, в [16] доведено існування єдиного розв'язку задач без початкових умов без припущень на зростання правої частини на $-\infty$.

У цій праці досліджено задачу без початкових умов (задачу Фур'є) для нелінійного ультрапараболічного рівняння. Одержано умови розв'язності цієї задачі без обмежень на поведінку розв'язку при $t \rightarrow -\infty$. При цьому використано методи, відомі для рівнянь параболічного та гіперболічного типів. Задачу досліджено в узагальнених просторах Лебега [19].

1. Формулювання задачі

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область з межею Γ ; $\hat{\Omega} = \Omega \times (0, y_0)$, $Q = \hat{\Omega} \times (-\infty, T)$, $-\infty < T < +\infty$; $Q_{t_1, t_2} = \hat{\Omega} \times (t_1, t_2)$, $t_1, t_2 \in (-\infty, T]$, $t_1 < t_2$, $Q_\tau = \hat{\Omega} \times (-\infty, \tau)$; $\hat{\Omega}_\tau = Q \cap \{t = \tau\}$.

В області Q розглянемо задачу без початкових умов

$$u_t - \lambda(y, t)u_y - \sum_{i,l=1}^n (a_{il}(x, y, t)u_{x_i})_{x_l} + \sum_{i=1}^n b_i(x, y, t)u_{x_i} + \\ + c(x, y, t)u + g(x, y, t, u) = f(x, y, t), \quad (1)$$

$$u|_{\Gamma \times (0, y_0) \times (-\infty, T)} = 0, \quad u(x, y_0, t) = 0. \quad (2)$$

Розглянемо простір $L^{p(x)}(\hat{\Omega})$ з нормою

$$\|v; L^{p(x)}(\hat{\Omega})\| = \inf \left\{ \mu > 0 : \int_{\hat{\Omega}} |v|^{p(x)} / \mu^{p(x)} dx < 1 \right\}.$$

Введемо простір $V_{\text{loc}}^{1,0,0}(Q)$ як замикання множини функцій $C^\infty([t_1, t_2]; C_0^\infty(\widehat{\Omega}))$ за нормою $\|u_x\|_{L^2(Q_{t_1, t_2})} + \|u\|_{L^{p(x)}(Q_{t_1, t_2})}$ для кожного $t_1, t_2 \in (-\infty, T]$.

Припустимо, що для коефіцієнтів рівняння (1) виконуються такі умови:

(A) $a_{il}, a_{il, x_k} \in L^\infty(Q)$, $(x, y, t) \in Q$, $i, l, k = 1, \dots, n$;

$$a_0|\xi|^2 \leq \sum_{i,l=1}^n a_{il}(x, y, t)\xi_i\xi_l; \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, a_0 = \text{const} > 0;$$

(B) $b_i \in L^\infty(Q)$, $i = \overline{1, n}$;

(C) $c \in L^\infty(Q)$;

(G) $g(x, y, t, \xi)$ вимірна за змінними (x, y, t) в області Q для всіх $\xi \in \mathbb{R}^1$,

неперервна за ξ майже для всіх $(x, y, t) \in Q$;

$$(g(x, y, t, \xi) - g(x, y, t, \eta))(\xi - \eta) \geq g_0|\xi - \eta|^{p(x)}; \quad |g(x, y, t, \xi)| \leq g^0|\xi|^{p(x)-1}$$

для майже всіх $(x, y, t) \in Q$ і всіх $\xi, \eta \in \mathbb{R}^1$; $g_0 = \text{const} > 0$, $g^0 = \text{const} > 0$;

(F) $f \in L_{\text{loc}}^{p'(x)}(\overline{Q})$, $1/p(x) + 1/p'(x) = 1$;

(L) $\lambda, \lambda_y \in C((-\infty, T] \times [0, y_0])$, $\lambda(y, t) > 0$, $\forall (y, t) \in [0, y_0] \times (-\infty, T]$;

(P) $p \in L^\infty(\Omega)$, $2 < p_1 = \text{ess inf}_\Omega p(x) \leq \text{ess sup}_\Omega p(x) = p_2 < +\infty$; $x \in \overline{\Omega}$.

ОЗНАЧЕННЯ. Узагальненим розв'язком задачі (1)-(3) назвемо функцію $u \in V_{\text{loc}}^{1,0,0}(Q) \cap C(-\infty, T; L^2(\widehat{\Omega}))$, яка задовольняє рівняння

$$\begin{aligned} & \int_{\widehat{\Omega}_{t_2}} uv \, dx \, dy + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega_t} \lambda(0, t) uv \, dx \, dt + \int_{Q_{t_1, t_2}} \left[-uv_t + \lambda(y, t) uv_y + \lambda_y(y, t) uv + \right. \\ & \left. + \sum_{i,l=1}^n a_{il}(x, y, t) u_{x_i} v_{x_l} + \sum_{i=1}^n b_i(x, y, t) u_{x_i} v + c(x, y, t) uv + g(x, y, t, u) v \right] dx \, dy \, dt = \\ & = \int_Q f(x, y, t) v \, dx \, dy \, dt - \int_{\widehat{\Omega}_{t_1}} uv \, dx \, dy \end{aligned} \quad (3)$$

для довільної функції $v \in C^1((-\infty, T]; C_0^\infty(\widehat{\Omega}))$, та всіх t_1, t_2 таких, що $t_1 < t_2 \leq T$.

2. Існування розв'язку

ТЕОРЕМА 1. Нехай виконуються умови (A)-(L), (P), $a_{ilt}, a_{iltt}, a_{ily}, b_{iy}, b_{it}, c_y, c_t \in L^\infty(Q)$, $i, l = \overline{1, n}$; існують сталі $a_1 \geq 0$ така, що $a_1|\xi|^2 \leq \sum_{i,l=1}^n a_{ilt}(x, y, t)\xi_i\xi_l$;

$\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ та $G_0 \geq 0$, $g^1, \bar{g}^1$ такі, що $|g_\xi(x, y, t, \xi)| \geq G_0|\xi|^{p(x)-2}$; $|g_y(x, y, t, \xi)| \leq \bar{g}^1|\xi|^{p(x)-1}$; $|g_t(x, y, t, \xi)| \leq g^1|\xi|^{p(x)-1}$; $f_y, f_t \in L_{\text{loc}}^2(\overline{Q})$, $f(x, y_0, t) = 0$; $p_2 = 2 + \frac{2}{n}$. Тоді існує узагальнений розв'язок задачі (1), (2).

Доведення. 1. В області $Q_{t_0, T}$ ($t_0 < T$ - довільне) розглянемо мішану задачу для рівняння (1) з умовами (2) та $u(x, y, t_0) = 0$. Нехай $\{\varphi^k(x)\}$ - база простору $H_0^1(\Omega) \cap L^{p(x)}(\Omega)$,

$$\varphi^{k,s}(x, y) = \varphi^k(x) \cos \frac{(2s-1)\pi}{2y_0} y, \quad u^{j,t_0}(x, y, t) = \sum_{k,s=1}^j c_{ks}^j(t) \varphi^{k,s}(x, y), \quad j = 1, 2, \dots \quad (4)$$

де $c_{ks}^j(t)$ є розв'язком задачі

$$\int_{\hat{\Omega}_\tau} \left[u_t^{j,t_0} \varphi^{k,s} - \lambda(y, t) u_y^{j,t_0} \varphi^{k,s} + \sum_{i,l=1}^n a_{il}(x, y, t) u_{x_i}^{j,t_0} \varphi_{x_i}^{k,s} + \sum_{i=1}^n b_i(x, y, t) u_{x_i}^{j,t_0} \varphi^{k,s} + \right. \\ \left. + c(x, y, t) u^{j,t_0} \varphi^{k,s} + g(x, y, t, u^{j,t_0}) \varphi^{k,s} \right] dx dy = \int_{\hat{\Omega}_\tau} f(x, y, t) \varphi^{k,s} dx dy, \quad (5)$$

$$c_{ks}^j(t_0) = 0, \quad k, s \in \{1, \dots, j\}. \quad (6)$$

За теоремою Каратеодорі [20, с. 54] існує абсолютно неперервний розв'язок задачі (5) - (6). Помножимо (5) на $c_{ks}^j(t)$, підсумуємо за s і k , зінтегруємо за t по проміжку $[t_0, \tau]$ і оцінимо кожний доданок отриманої рівності. Матимемо:

$$\tau_1 = \int_{Q_{t_0, \tau}} u_t^{j,t_0} u^{j,t_0} dx dy dt = \frac{1}{2} \int_{\hat{\Omega}_\tau} (u^{j,t_0})^2 dx dy;$$

$$\tau_2 = - \int_{Q_{t_0, \tau}} \lambda(y, t) u_y^{j,t_0} u^{j,t_0} dx dy dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\tau} \int_{\Omega} \lambda(0, t) (u^{j,t_0}(x, 0, t))^2 dx dt + \\ + \frac{1}{2} \int_{Q_{t_0, \tau}} \lambda_y(y, t) (u^{j,t_0})^2 dx dy dt;$$

$$\tau_3 = \int_{Q_{t_0, \tau}} \sum_{i,l=1}^n a_{il}(x, y, t) u_{x_i}^{j,t_0} u_{x_l}^{j,t_0} dx dy dt \geq a_0 \int_{Q_{t_0, \tau}} \sum_{i=1}^n (u_{x_i}^{j,t_0})^2 dx dy dt;$$

$$\tau_4 = \int_{Q_{t_0, \tau}} \sum_{i=1}^n b_i(x, y, t) u_{x_i}^{j,t_0} u^{j,t_0} dx dy dt \leq \frac{1}{2} \int_{Q_{t_0, \tau}} \left[\sum_{i=1}^n \delta(b^0)^2 (u_{x_i}^{j,t_0})^2 + \frac{n}{\delta} (u^{j,t_0})^2 \right] dx dy dt;$$

$$\tau_5 = \int_{Q_{t_0, \tau}} c(x, y, t) u^{j,t_0} u^{j,t_0} dx dy dt \leq c^0 \int_{Q_{t_0, \tau}} (u^{j,t_0})^2 dx dy dt;$$

$$\tau_6 = \int_{Q_{t_0, \tau}} g(x, y, t, u^{j,t_0}) u^{j,t_0} dx dy dt \geq g_0 \int_{Q_{t_0, \tau}} |u^{j,t_0}|^{p(x)} dx dy dt;$$

$$\tau_7 = \int_{Q_{t_0, \tau}} f(x, y, t) u^{j,t_0} dx dy dt \leq \int_{Q_{t_0, \tau}} \left[\frac{|f(x, y, t)|^{p'(x)}}{p'(x) \delta^{\frac{1}{p_1-1}}} + \frac{\delta |u^{j,t_0}|^{p(x)}}{p(x)} \right] dx dy dt,$$

де $c(x, y, t) \leq c^0 = \text{const}$, $|b_i(x, y, t)| \leq b^0 = \text{const}$, $\forall i = \overline{1, n}$. Вибравши δ з умов $2a_0 - (b^0)^2 \delta > 0$, $g_0 \geq \delta p_1^{-1}$, врахувавши ці оцінки та застосувавши лему Гронуолла - Беллмана до отриманої з них нерівності, одержимо оцінку

$$\begin{aligned} & \int_{\hat{\Omega}_\tau} (u^{j,t_0})^2 dx dy + \int_{t_0}^\tau \int_{\Omega} \lambda(0, t) (u^{j,t_0})^2 dx dt + \int_{Q_{t_0, \tau}} \left[\sum_{i=1}^n (u_{x_i}^{j,t_0})^2 + |u^{j,t_0}|^{p(x)} \right] dx dy dt \leq \\ & \leq M_1 \int_Q |f|^{p'(x)} dx dy dt, \end{aligned} \quad (7)$$

в якій стала M_1 не залежить від j .

2. Зауважимо, що $\left(\cos \frac{(2s-1)\pi}{2y_0} y \right)_{yy} = -\omega_s \cos \frac{(2s-1)\pi}{2y_0} y$, де $\omega_s = \left(\frac{(2s-1)\pi}{2y_0} \right)^2$. Помножимо (5) на $c_{ks}^j(t) \omega_s$, підсумуємо за s і k , зінтегруємо за t від t_0 до τ та замінімо значення $\sum_{s,k=1}^j c_{ks}^j(t) \omega_s \varphi^{k,s}(x, y)$ з попереднього виразу на $-u_{yy}^{j,t_0}$. Після таких перетворень оцінимо кожний з доданків одержаної рівності окремо:

$$\begin{aligned} \tau_8 &= - \int_{Q_{t_0, \tau}} u_t^{j,t_0} u_{yy}^{j,t_0} dx dy dt = \int_{Q_{t_0, \tau}} u_{ty}^{j,t_0} u_y^{j,t_0} dx dy dt = \frac{1}{2} \int_{\hat{\Omega}_\tau} (u_y^{j,t_0})^2 dx dy; \\ \tau_9 &= \int_{Q_{t_0, \tau}} \lambda(y, t) u_y^{j,t_0} u_{yy}^{j,t_0} dx dy dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^\tau \int_{\Omega} \lambda(y_0, t) (u_y^{j,t_0})^2 dx dt - \\ & - \frac{1}{2} \int_{Q_{t_0, \tau}} \lambda_y(y, t) (u_y^{j,t_0})^2 dx dy dt; \\ \tau_{10} &= - \int_{Q_{t_0, \tau}} \sum_{i,l=1}^n a_{il}(x, y, t) u_{x_i}^{j,t_0} u_{x_l y}^{j,t_0} dx dy dt \geq a_0 \int_{Q_{t_0, \tau}} \sum_{i=1}^n (u_{x_i y}^{j,t_0})^2 dx dy dt - \\ & - \frac{1}{2} \int_{Q_{t_0, \tau}} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\tilde{a}n}{\delta} (u_{x_i}^{j,t_0})^2 + n\delta (u_{x_i y}^{j,t_0})^2 \right] dx dy dt; \\ \tau_{11} &= - \int_{Q_{t_0, \tau}} \sum_{i=1}^n b_i(x, y, t) u_{x_i}^{j,t_0} u_{yy}^{j,t_0} dx dy dt \leq \frac{1}{2} \int_{Q_{t_0, \tau}} \left[\tilde{b}\delta \sum_{i=1}^n (u_{x_i}^{j,t_0})^2 + \right. \\ & \left. + (b^0)^2 \delta \sum_{i=1}^n (u_{x_i y}^{j,t_0})^2 + \frac{2n}{\delta} (u_y^{j,t_0})^2 \right] dx dy dt; \\ \tau_{12} &= - \int_{Q_{t_0, \tau}} c(x, y, t) u^{j,t_0} u_{yy}^{j,t_0} dx dy dt \leq \frac{1}{2} \int_{Q_{t_0, \tau}} \left[\left(\frac{\tilde{c}}{\delta} + 2c^0 \right) (u_y^{j,t_0})^2 + \delta (u^{j,t_0})^2 \right] dx dy dt. \end{aligned}$$

Зауважимо, що $|g(x, y_0, t, u^{j,t_0}(x, y_0, t))| \leq g_0 |u^{j,t_0}(x, y_0, t)|^{p(x)-1} = 0$. Тому, застосувавши умову (G), та, оскільки, на підставі властивостей функцій з простору

$L^{p(x)}(Q_{t_0, \tau})$ існує стала r така, що

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{2} \int_{Q_{t_0, \tau}} \left(\frac{\partial g(x, y, t, u^{j, t_0})}{\partial y} \right)^2 dx dy dt &\leq \frac{(\bar{g}^1)^2 \delta}{2} \int_{Q_{t_0, \tau}} |u^{j, t_0}|^{2(p(x)-1)} dx dy dt \leq \\ &\leq \frac{(\bar{g}^1)^2 \delta}{2} \|u^{j, t_0}; L^{2(p(x)-1)}(Q_{t_0, \tau})\|^r \leq \frac{(\bar{g}^1)^2 \delta \mu}{2} \left(\int_{Q_{t_0, \tau}} \sum_{i=1}^n (u_{x_i}^{j, t_0})^2 dx dy dt \right)^{r/2} \leq M_2, \end{aligned}$$

M_2 — стала, одержимо

$$\begin{aligned} \tau_{13} &= - \int_{Q_{t_0, \tau}} g(x, y, t, u^{j, t_0}) u_{yy}^{j, t_0} dx dy dt \geq \\ &\geq G_0 \int_{Q_{t_0, \tau}} |u^{j, t_0}|^{p(x)-2} |u_{yy}^{j, t_0}|^2 dx dy dt - \frac{1}{2\delta} \int_{Q_{t_0, \tau}} (u_y^{j, t_0})^2 dx dy dt - M_2; \\ \tau_{14} &= - \int_{Q_{t_0, \tau}} f(x, y, t) u_{yy}^{j, t_0} dx dy dt \leq \frac{1}{2} \int_{Q_{t_0, \tau}} \left[\delta |f_y|^2 + \frac{1}{\delta} |u_y^{j, t_0}|^2 \right] dx dy dt, \end{aligned}$$

Тут $\bar{a} = \max_{i, l} \sup_Q |a_{il, y}(x, y, t)|^2$, $\bar{b} = \max_i \sup_Q |b_{iy}(x, y, t)|^2$, $\bar{c} = \sup_Q |c_y(x, y, t)|^2$. За теоремою вкладення знаходимо, що в умові (P) $p_2 = \frac{2n+2}{n}$. Зауважимо, якщо $g(x, y, t, \xi) \equiv g(x, t, \xi)$, то $\bar{g}^1 = 0$ і, отже, $p_2 < +\infty$ при довільному n . Після проведених оцінок, використавши (7) та вибравши δ з умови $2a_0 - n\delta - (b^0)^2\delta > 0$, застосувавши лему Гронуолла - Беллмана, матимемо оцінку

$$\int_{\bar{\Omega}_\tau} (u_y^{j, t_0})^2 dx dy + \int_{Q_{t_0, \tau}} \sum_{i=1}^n (u_{x_i y}^{j, t_0})^2 dx dy dt \leq M_3 \int_Q \left(|f|^{p'(x)} + |f_y|^2 \right) dx dy dt + M_4, \quad (8)$$

в якій сталі M_3, M_4 не залежать від j .

3. Оскільки $u^{j, t_0}(x, y, t_0) = 0$ і виконується умова (G), то з (5) випливатиме, що

$$\int_{\bar{\Omega}_{t_0}} (u_t^{j, t_0})^2 dx dy \leq \int_{\bar{\Omega}_{t_0}} |f(x, y, t_0)|^2 dx dy.$$

Продиференціюємо (5) за t , домножимо на $c_{kst}^j(t)$, підсумуємо за s і k , зінтегруємо за t від t_0 до τ і оцінимо кожний доданок отриманої рівності:

$$\begin{aligned} \tau_{16} &= \int_{Q_{t_0, \tau}} u_{tt}^{j, t_0} u_t^{j, t_0} dx dy dt \geq \frac{1}{2} \int_{\bar{\Omega}_\tau} (u_t^{j, t_0})^2 dx dy - \frac{1}{2} \int_{\bar{\Omega}_{t_0}} |f(x, y, t_0)|^2 dx dy; \\ \tau_{17} &= - \int_{Q_{t_0, \tau}} \left[\lambda_t(y, t) u_y^{j, t_0} + \lambda(y, t) u_{yt}^{j, t_0} \right] u_t^{j, t_0} dx dy dt \geq - \frac{1}{2} \int_{Q_{t_0, \tau}} \left[|\lambda_1|^2 \frac{(u_y^{j, t_0})^2}{\delta} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \delta(u_t^{j,t_0})^2 \Big] dx dy dt + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\tau} \int_{\Omega} \lambda(0,t)(u_t^{j,t_0})^2 dx dt + \int_{Q_{t_0,\tau}} \frac{\lambda_y}{2} (u_t^{j,t_0})^2 dx dy dt; \\
\tau_{18} &= \int_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i,l=1}^n \left(a_{il}(x,y,t) u_{x_i t}^{j,t_0} + a_{ilt}(x,y,t) u_{x_i}^{j,t_0} \right) u_{x_i t}^{j,t_0} dx dy dt \geq \\
& \geq \int_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^n \left[a_0 (u_{x_i t}^{j,t_0})^2 - \frac{a^2}{2} (u_{x_i}^{j,t_0})^2 \right] dx dy dt + \frac{a_1}{2} \int_{\widehat{\Omega}_{\tau}} \sum_{i=1}^n (u_{x_i}^{j,t_0})^2 dx dy. \\
\tau_{19} &= \int_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^n \left[b_{it}(x,y,t) u_{x_i}^{j,t_0} + b_i(x,y,t) u_{x_i t}^{j,t_0} \right] u_t^{j,t_0} dx dy dt \leq \frac{1}{2} \int_{Q_{t_0,\tau}} \left[\sum_{i=1}^n \delta (b^0)^2 (u_{x_i t}^{j,t_0})^2 + \right. \\
& \quad \left. + \frac{n}{\delta} (u_t^{j,t_0})^2 + \frac{(b^1)^2}{\delta} \sum_{i=1}^n (u_{x_i}^{j,t_0})^2 + n \delta (u_t^{j,t_0})^2 \right] dx dy dt; \\
\tau_{20} &= \int_{Q_{t_0,\tau}} \left[c_t(x,y,t) u_t^{j,t_0} + c(x,y,t) u_t^{j,t_0} \right] u_t^{j,t_0} dx dy dt \leq \\
& \leq \int_{Q_{t_0,\tau}} \left[c^0 (u_t^{j,t_0})^2 + \frac{\delta}{2} (u_t^{j,t_0})^2 + \frac{(c^1)^2}{2\delta} (u_t^{j,t_0})^2 \right] dx dy dt;
\end{aligned}$$

За теоремою вкладення та оцінкою (8)

$$\begin{aligned}
\tau_{21} &= \int_{Q_{t_0,\tau}} g_t(x,y,t, u_t^{j,t_0}) u_t^{j,t_0} dx dy dt \geq \\
& \geq G_0 \int_{Q_{t_0,\tau}} |u_t^{j,t_0}|^{p(x)-2} |u_t^{j,t_0}|^2 dx dy dt - \frac{1}{2\delta} \int_{Q_{t_0,\tau}} (u_t^{j,t_0})^2 dx dy dt - M_5; \\
\tau_{22} &= \int_{Q_{t_0,\tau}} f_t(x,y,t) u_t^{j,t_0} dx dy dt \leq \frac{1}{2} \int_{Q_{t_0,\tau}} \left[\frac{|f_t(x,y,t)|^2}{\delta} + \delta |u_t^{j,t_0}|^2 \right] dx dy dt.
\end{aligned}$$

Тут $a^2 = \max_{i,l} \sup_Q |a_{il,tt}(x,y,t)|^2$, $b^1 = \max_i \sup_Q |b_{it}(x,y,t)|^2$, $c^1 = \sup_Q |c_t(x,y,t)|^2$,

Після проведених оцінок, вибравши $\delta > 0$ з умови $2a_0 - (b^0)^2 \delta > 0$ та застосувавши лему Гронуолла - Беллмана і оцінку (8), матимемо нерівність

$$\begin{aligned}
& \int_{\widehat{\Omega}_{\tau}} (u_t^{j,t_0})^2 dx dy + \int_{t_0}^{\tau} \int_{\Omega} \lambda(0,t)(u_t^{j,t_0})^2 dx dt + \int_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^n (u_{x_i t}^{j,t_0})^2 dx dy dt \leq \\
& \leq M_6 \int_Q \left[|f|^{p'(x)} + |f_y|^2 + |f_t|^2 \right] dx dy dt
\end{aligned} \tag{9}$$

в якій стала M_6 не залежить від j . З оцінок (7)-(9) випливають такі збіжності деякої підпослідовності $\{u^{jk,t_0}\}$ послідовності $\{u^{j,t_0}\}$:

$$\begin{aligned} u^{jk,t_0} &\rightarrow u^{t_0} - * \text{ слабко в } L^\infty(t_0, T; L^2(\widehat{\Omega})); u_{x_i}^{jk,t_0} \rightarrow u_{x_i}^{t_0} \text{ слабко в } L^2(t_0, T; L^2(\widehat{\Omega})); \\ u^{jk,t_0} &\rightarrow u^{t_0} \text{-слабко в } L^{p(x)}(Q_{t_0,T}); \sqrt{\lambda(0, \cdot)} u^{jk,t_0}(\cdot, 0, \cdot) \rightarrow \xi_1 \text{ слабко в } L^2((t_0, T) \times \Omega); \\ u^{jk,t_0}(\cdot, \cdot, T) &\rightarrow \sigma - \text{ слабко в } L^2(\widehat{\Omega}); u_y^{jk,t_0} \rightarrow u_y^{t_0} * \text{-слабко в } L^\infty(t_0, T; L^2(\widehat{\Omega})); \\ u_t^{jk,t_0} &\rightarrow u_t^{t_0} * \text{-слабко в } L^\infty(t_0, T; L^2(\widehat{\Omega})). \end{aligned} \quad (10)$$

З умови (G) та збіжностей (10) випливає, що

$$\int_{Q_{t_0,T}} |g(x, y, t, u^{j,t_0})|^{p(x)} dx dy dt \leq M_7 \int_{Q_{t_0,T}} |u^{j,t_0}|^{p(x)} dx dy dt \leq M_8 \int_Q |f|^{p'(x)} dx dy dt,$$

де стала M_8 не залежить від j . Звідси випливатиме, що

$$g(x, y, t, u^{j,t_0}) \rightarrow \chi \text{ слабко в } L^{p'(x)}(Q_{t_0,T}). \quad (11)$$

Оскільки $u^{jk,t_0} \rightarrow u^{t_0}$, $u_y^{jk,t_0} \rightarrow u_y^{t_0}$ слабко в $L^\infty(t_0, T; L^2(\widehat{\Omega}))$, то $u^{jk,t_0} \rightarrow u^{t_0}$ слабко в $W^{1,2}(0, y_0; L^2([t_0, T] \times \Omega))$. Тоді $\lim_{j_k \rightarrow \infty} \int_{Q_{t_0,T}} u_y^{jk,t_0} v dx dy dt = \int_{Q_{t_0,T}} u_y^{t_0} v dx dy dt$.

З одержаних збіжностей та (5) знаходимо, що $u^{t_0}(x, y_0, t) = 0$, $\sqrt{\lambda(0, t)} u^{t_0}(x, 0, t) = \xi_1$ майже для всіх $(x, t) \in \Omega \times (t_0, T)$. Крім того, оскільки $u^{jk,t_0} \rightarrow u^{t_0}$, $u_t^{jk,t_0} \rightarrow u_t^{t_0} *$ слабко в $L^\infty(t_0, T; L^2(\widehat{\Omega}))$, то $u^{t_0} \in C(t_0, T; L^2(\widehat{\Omega}))$, вираз $u^{t_0}(x, y, t_0)$ має зміст і $u^{t_0}(x, y, t_0) = 0$, $u^{t_0}(x, y, T) = \sigma$.

Легко показати за схемою [21, с. 169], що u^{t_0} - розв'язок мішаної задачі, яка розглядалася в області $Q_{t_0,T}$.

4. Розглянемо в області $Q_{t_0,T}$ задачу (1)-(2) з початковою умовою

$$u(x, y, t_0) = 0. \quad (12)$$

Виберемо $t_0 = T - 1, T - 2, \dots, T - k$ і отримаємо послідовність функцій $\{u^k\}$, які є розв'язками мішаної задачі (1)-(2), (12) при відповідному t_0 . Продовжимо кожну з функцій послідовності нулем в область Q_{T-k} і збережемо для неї те саме позначення. Існування розв'язків мішаних задач доведено. Очевидно, що функція u^k є розв'язком задачі без початкових умов (1)-(2) з правою частиною f_k в рівнянні (1), де

$$f_k(x, y, t) = \begin{cases} f(x, y, t), & (x, y, t) \in Q_{T-k,T}; \\ 0, & (x, y, t) \in Q_{T-k}. \end{cases}$$

Виберемо функцію $\theta_1(t)$ [16, с. 24] таку, що $\theta_1 \in C^1(\mathbb{R})$, $\theta_1'(t) \geq 0$ на $\mathbb{R}$, $0 \leq \theta_1(t) \leq 1$; $\theta_1(t) = 0$, якщо $t \in (-\infty; -1]$, $\theta_1(t) = \exp\{-1/(t+1)\}$, якщо $t \in (-1; -1/2]$, $\theta_1(t) \geq \exp\{-2\}$, якщо $t \in (-1/2; 0)$, $\theta_1(t) = 1$, якщо $t \in [0, +\infty)$. Зауважимо, що

$$\sup_{\mathbb{R}} \theta_1'(t) \theta_1^{-\kappa}(t) \leq C, \quad (13)$$

де $0 < \kappa < 1$, C – стала, яка залежить тільки від κ . Доведемо фундаментальність послідовності $\{u^k\}_{k=1}^\infty$ в просторах $C(-\infty, T; L^2(\hat{\Omega}))$ та $V_{\text{loc}}^{1,0,0}(Q)$.

Функція $u^m - u^k$ задовольнятиме рівняння

$$\begin{aligned} & \int_{\hat{\Omega}_{t_2}} (u^m - u^k) v \, dx \, dy + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\hat{\Omega}_t} \lambda(0, t) (u^m - u^k) v \, dx \, dt + \int_{Q_{t_1, t_2}} \left[-(u^m - u^k) v_t + \right. \\ & + \lambda(y, t) (u^m - u^k) v_y + \lambda_y(y, t) (u^m - u^k) v + \sum_{i, l=1}^n a_{il}(x, y, t) (u_{x_i}^m - u_{x_i}^k) v_{x_l} + \\ & + \sum_{i=1}^n b_i(x, y, t) (u_{x_i}^m - u_{x_i}^k) v + c(x, y, t) (u^m - u^k) v + (g(x, y, t, u^m) - \\ & \left. - g(x, y, t, u^k)) v \right] dx \, dy \, dt = \int_{Q_{t_1, t_2}} (f_m(x, y, t) - f_k(x, y, t)) v \, dx \, dy \, dt + \int_{\hat{\Omega}_{t_1}} (u^m - u^k) v \, dx \, dy \quad (14) \end{aligned}$$

для довільної функції $v \in C^1((-\infty, T]; C_0^\infty(\hat{\Omega}))$, $t_1 < t_2 \leq T$. Оцінимо кожний доданок цієї рівності, вибравши $v = (u^m - u^k) \theta(t)$, де $\theta(t) = \theta_1\left(\frac{t-t_1}{\delta}\right)$, $\delta > 0$ і $t_1 - \delta$ та β замість відповідно t_1 і t_2 , де β – довільне число з проміжку $[t_1, t_2]$. Тоді, врахувавши (13), маємо

$$\begin{aligned} \tau_{22} &= \int_{\hat{\Omega}_\beta} (u^m - u^k)^2 \, dx \, dy; \quad \tau_{23} = \int_{\hat{\Omega}_{t_1-\delta}} (u^m - u^k)^2 \theta(t_1 - \delta) \, dx \, dy = 0; \\ \tau_{24} &= - \int_{Q_{t_1-\delta, \beta}} (u^m - u^k) ((u^m - u^k) \theta(t))_t \, dx \, dy \, dt = - \frac{1}{2} \int_{\hat{\Omega}_\beta} (u^m - u^k)^2 \, dx \, dy - \\ & - \frac{1}{2} \int_{Q_{t_1-\delta, \beta}} (u^m - u^k)^2 \theta'(t) \, dx \, dy \, dt \geq - \frac{1}{2} \int_{\hat{\Omega}_\beta} (u^m - u^k)^2 \, dx \, dy + \\ & + \frac{2\delta_1}{p_1} \int_{Q_{t_1-\delta, t_1}} |u^m - u^k|^{p(x)} \theta(t) \, dx \, dy \, dt + 2C_1 [\delta_1 \delta]^{-2/(p_1-2)}. \\ \tau_{25} &= \int_{Q_{t_1-\delta, \beta}} \lambda(y, t) (u_y^m - u_y^k) (u^m - u^k) \theta(t) \, dx \, dy \, dt = \\ & = \frac{1}{2} \int_{t_1-\delta}^\beta \int_{\hat{\Omega}} \lambda(0, t) (u^m - u^k)^2 \theta(t) \, dx \, dt - \frac{1}{2} \int_{Q_{t_1-\delta, \beta}} \lambda_y(y, t) (u^m - u^k)^2 \theta(t) \, dx \, dy \, dt; \\ \tau_{26} &= \int_{Q_{t_1-\delta, \beta}} \lambda_y(y, t) (u^m - u^k)^2 \theta(t) \, dx \, dy \, dt; \\ \tau_{27} &= \int_{Q_{t_1-\delta, \beta}} \sum_{i, l=1}^n a_{il}(x, y, t) (u_{x_i}^m - u_{x_i}^k) (u_{x_l}^m - u_{x_l}^k) \theta(t) \, dx \, dy \, dt \geq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq a_0 \int_{Q_{t_1-\delta,\beta}} \sum_{i=1}^n (u_{x_i}^m - u_{x_i}^k)^2 \theta(t) dx dy dt; \\
\tau_{28} &= \int_{Q_{t_1-\delta,\beta}} \sum_{i=1}^n b_i(x, y, t) (u_{x_i}^m - u_{x_i}^k) (u^m - u^k) \theta(t) dx dy dt \leq \\
&\leq \frac{1}{2} \int_{Q_{t_1-\delta,\beta}} \left[\sum_{i=1}^n \delta_2 (b^0)^2 (u_{x_i}^m - u_{x_i}^k)^2 + \frac{n}{\delta_2} (u^m - u^k)^2 \right] \theta(t) dx dy dt; \\
\tau_{29} &= \int_{Q_{t_1-\delta,\beta}} c(x, y, t) (u^m - u^k)^2 \theta(t) dx dy dt \leq c^0 \int_{Q_{t_1-\delta,\beta}} (u^m - u^k)^2 dx dy dt; \\
\tau_{30} &= \int_{Q_{t_1-\delta,\beta}} (g(x, y, t, u^m) - g(x, y, t, u^k)) (u^m - u^k) \theta(t) dx dy dt \geq \\
&\geq g_0 \int_{Q_{t_1-\delta,\beta}} |u^m - u^k|^{p(x)} \theta(t) dx dy dt; \\
\tau_{31} &= \int_{Q_{t_1-\delta,\beta}} (f_m(x, y, t) - f_k(x, y, t)) (u^m - u^k) \theta(t) dx dy dt \leq \\
&\leq \int_{Q_{t_1-\delta,\beta}} \left[\frac{|f_m - f_k|^{p'(x)}}{p'(x) \varepsilon^{\frac{1}{p_1-1}}} + \frac{\varepsilon |u^m - u^k|^{p(x)}}{p(x)} \right] \theta(t) dx dy dt.
\end{aligned}$$

Виберемо $\delta_1, \varepsilon, \delta_2$ так, щоб виконувалися нерівності $2a_0 - (b^0)^2 \delta_2 > 0$; $p_1 g_0 - \varepsilon + \delta_1 > 0$, k, m - довільні, такі, що $T - k < t_1 - \delta$, $T - m < t_1 - \delta$. При так вибраних k та m $f_m - f_k = 0$ в $Q_{t_1-\delta,\beta}$. Тоді з проведених оцінок випливатиме оцінка

$$\begin{aligned}
&\max_{[t_1, t_2]} \int_{\hat{\Omega}} (u^m - u^k)^2 dx dy + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \lambda(0, t) (u^m - u^k)^2 \theta(t) dx dt + \int_{Q_{t_1-\delta,\beta}} \left[\sum_{i=1}^n (u_{x_i}^m - u_{x_i}^k)^2 + \right. \\
&\left. + |u^m - u^k|^{p(x)} \right] \theta(t) dx dy dt \leq C_2 \delta^{-\frac{2}{p_1-2}}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Сталі C_1, C_2 залежать тільки від κ . Виберемо $\varepsilon > 0$ - довільне як завгодно мале число, δ таким чином, щоб права частина (15) була менша ε . Тоді для довільних $k, m \geq k_0$, де $k_0 = [T - t_1 + \delta] + 1$ матимемо, що ліва частина (15) менша за ε . Тому $\{u^k\}_{k=1}^\infty$ - фундаментальна в просторах $C(-\infty, T; L^2(\hat{\Omega}))$ та $V_{loc}^{1,0,0}(Q)$.

Отже, існує функція $u(x, y, t)$ така, що $u^k \rightarrow u$ в $C(-\infty, T; L^2(\hat{\Omega}))$, $u_{x_i}^k \rightarrow u_{x_i}$ в $L_{loc}^2(Q)$, $u^k \rightarrow u$ в $L_{loc}^{p(x)}(Q)$, $u^k(\cdot, 0, \cdot) \rightarrow \tilde{u}(\cdot, 0, \cdot)$ в $L_{loc}^2((-\infty, T] \times \Omega)$.

5. Використовуючи (5), збіжності (10), (11) та отримані вище оцінки легко одер-

жати рівність

$$\begin{aligned} & \int_{\hat{\Omega}_{t_2}} uv \, dx dy - \int_{\hat{\Omega}_{t_1}} uv \, dx dy + \int_{Q_{t_1, t_2}} \left[-uv_t + \lambda_y(y, t)uv + \lambda(y, t)uv_y + \sum_{i,l=1}^n a_{il}(x, y, t)u_{x_i}v_{x_l} + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^n b_i(x, y, t)u_{x_i}v + \chi v + c(x, y, t)uv \right] dx dy dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\hat{\Omega}} \lambda(0, t)\tilde{u}v \, dx dt = \int_{Q_{t_1, t_2}} f v \, dx dy dt, \end{aligned} \quad (16)$$

для довільної функції $v \in C^1(\bar{Q})$ такої, що $v|_{\Gamma \times (0, y_0) \times (t_1, t_2)} = 0$, $v(x, y_0, t) = 0$. Нехай в (16) функція $v \in C_0^1(\bar{Q})$. Тоді (16) перепишемо у вигляді

$$\int_{Q_{t_1, t_2}} (v_t - \lambda(y, t)v_y)u \, dx dy dt = \int_{Q_{t_1, t_2}} \left[F(x, y, t)v + \sum_{i,l=1}^n a_{il}(x, y, t)u_{x_i}v_{x_l} \right] dx dy dt, \quad (17)$$

де $F(x, y, t) = \lambda_y(y, t)u + \sum_{i=1}^n b_i(x, y, t)u_{x_i} + c(x, y, t)u + \chi - f(x, y, t)$. Позначимо через $F_1(x, y, t) = F(x, y, t) + \sum_{i,l=1}^n (a_{il}(x, y, t)u_{x_i})_{x_l}$.

Нехай $y = \rho(t, \xi, \tau)$ - є розв'язком задачі Коші $\frac{dy}{dt} = -\lambda(y, t)$, $y(\tau) = \xi$. Вздовж кожного такого розв'язку $F \in L^{q_1}(t_1, t_2; L^{p'(x)}(\hat{\Omega}))$, $F_1 \in L^{q_1}(t_1, t_2; L^{p'(x)}(\hat{\Omega}) + W^{-1,2}(\hat{\Omega}))$, де $[t_1, t_2]$ - відрізок, на якому визначений такий розв'язок, $q_1 = \inf_{\Omega} p'(x)$.

В (17) зробимо заміну змінних: $y = \rho(\tau, \xi, t_2)$, $t = \tau$. Якобіан переходу $J = \frac{\partial \rho}{\partial \xi} = \exp\{-\int_{t_2}^{\tau} \lambda_y \, dt\}$, $J_{\tau} = -\lambda_y(\rho(\tau, \xi, t_2), \tau)J$. Нехай область $(0, y_0) \times (t_1, t_2)$ при такому відображенні отримується з області D_1 . Тоді з (17)

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_{D_1} u(x, \rho(\tau, \xi, t_2), \tau) (v(\rho(\tau, \xi, t_2), \tau)J)_{\tau} d\xi d\tau dx = \\ & = \int_{\Omega} \int_{D_1} \left[\left(F(x, \rho(\tau, \xi, t_2), \tau) + J_{\tau} \frac{u(x, \rho(\tau, \xi, t_2), \tau)}{J} \right) v(x, \rho(\tau, \xi, t_2), \tau)J + \right. \\ & \left. + \sum_{i,l=1}^n a_{il}(x, \rho(\tau, \xi, t_2), \tau)u_{x_i}(x, \rho(\tau, \xi, t_2), \tau)v_{x_l}(x, \rho(\tau, \xi, t_2), \tau)J \right] d\xi d\tau dx. \end{aligned}$$

Тобто,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_{D_1} \frac{d}{d\tau} u(x, \rho(\tau, \xi, t_2), \tau) v(\rho(\tau, \xi, t_2), \tau)J d\xi d\tau dx = \int_{\Omega} \int_{D_1} [-F(x, \rho(\tau, \xi, t_2), \tau) - \\ & - \sum_{i,l=1}^n a_{il}(x, \rho(\tau, \xi, t_2), \tau)u_{x_i}(x, \rho(\tau, \xi, t_2), \tau)v_{x_l}(x, \rho(\tau, \xi, t_2), \tau) + \end{aligned}$$

$$+ \lambda_y(\rho(\tau, \xi, t_2), \tau) \times u(x, \rho(\tau, \xi, t_2), \tau) \Big] J d\xi d\tau dx$$

і $\frac{d}{d\tau} u(x, \rho(\tau, \xi, t_2), \tau)$ є функцією з простору $L^{q_1}(t_1, t_2; L^{p'(x)}(\hat{\Omega}) + W^{-1,2}(\hat{\Omega}))$ для кожного $\xi \in [0, y_0]$. Тоді вираз $u_t - \lambda(y, t)u_y$ має зміст і в формулі (16) можна взяти $v = u$.

Нехай область $D_1 = \{(\tau, \xi) : t_1 < \tau < t_2, \varphi_1(\tau, t_2) < \xi < \psi_1(\tau, t_2)\}$, ξ_0, ξ_1 є розв'язками рівнянь $\rho(t_1, \xi, t_2) = 0$, $\rho(t_1, \xi, t_2) = y_0$ відповідно. Рівняння $\rho(t, \xi, t_2) = 0$, $\rho(t, \xi, t_2) = y_0$ можна розв'язати стосовно τ : $\bar{\tau} = \varphi(t, t_2)$, $\tilde{\tau} = \psi(t, t_2)$. Виберемо в (17) функцію $v \in C^1((-\infty, T]; L^2(\hat{\Omega}))$. Тоді

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_{D_1} u(x, \rho(\tau, \xi, t_2), \tau) (v(x, \rho(\tau, \xi, t_2), \tau) J)_\tau d\xi d\tau dx = \\ & = \int_{\Omega} \left[\int_{\xi_0}^0 u(x, 0, \bar{\tau}) v(x, 0, \bar{\tau}) J(\bar{\tau}) d\xi - \int_0^{y_0} u(x, \xi, t_2) v(x, \xi, t_2) J(t_2) d\xi - \right. \\ & - \int_{\xi_0}^{\xi_1} u(x, \rho(t_1, \xi, t_2), t_1) v(x, \rho(t_1, \xi, t_2), t_1) J(t_1) d\xi - \int_{\xi_1}^{y_0} u(x, y_0, \tilde{\tau}) v(x, y_0, \tilde{\tau}) J(\tilde{\tau}) d\xi \Big] dx - \\ & - \int_{\Omega} \int_{D_1} u_\tau(x, \rho(\tau, \xi, t_2), \tau) v(x, \rho(\tau, \xi, t_2), \tau) J d\xi d\tau dx. \end{aligned}$$

Повернемося до попередніх змінних. У першому доданку виконаємо заміну $t = \bar{\tau} = \varphi(\xi, t_2)$. Тоді якобіан переходу дорівнюватиме $\frac{\lambda(0, t)}{J(\bar{\tau})}$ і перший доданок дорівнює

$\int_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} \lambda(0, t) u(x, 0, t) v(x, 0, t) dt dx$. Так само, виконавши заміну змінних в інших інтегралах, одержимо інтеграли 1, 2, 3 формули (16). Вибравши тепер $v(x, y_0, t) = 0$ та порівнявши одержані формули з (16), знайдемо, що $u(x, 0, t) = \tilde{u}(x, 0, t)$. Так само, вибравши $v(x, 0, t) = 0$, знайдемо, що $u(x, y_0, t) = 0$. За схемою, наведеною в [21, с.169] легко показати, що u є розв'язком задачі (1), (2).

Зауваження. Якщо в умовах теореми 1 $g(x, y, t, u) = g(x)|u|^{p(x)-2}u$, $g(x) > 0$, то p_2 може бути довільним скінченним числом.

3. Єдиність розв'язку.

ТЕОРЕМА 2. Якщо виконуються умови (A) – (G), (L), (P), де $2 < p_2 < +\infty$ то задача (1)-(2) не може мати більше одного розв'язку.

Доведення. Припустимо, що існує два різні розв'язки u_1, u_2 задачі (1), (2). Їх різниця $u_1 - u_2$ задовольнятиме рівність (14), в якій замість $u^m - u^k$ стоятиме $u_1 - u_2$, $f_1 - f_2 \equiv 0$. Провівши перетворення подібно до перетворень після формули (14), отримаємо оцінку аналогічну до (15). Вибравши δ як завгодно великим, отримаємо, що $u_1 = u_2$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Введение в теорию случайных процессов*, М.: "Наука", 1977, р. 568.
2. У.Флеминг, Р. Ришел, *Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами*, М.: "Мир", 1978, р. 316.
3. Kolmogorov A.N., *Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownschen Bewegung)*, Ann. Math. 35 (1934), 116-117.
4. Дронь В.С., *Про коректну розв'язність у вагових просторах Гельдера задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова*, Науковий вісник Чернів. ун-ту.- сер. матем. 76 (2000), 32-42.
5. Малицька Г.П., *Про структуру фундаментальних розв'язків задачі Коші для еліптико-параболічних рівнянь, що узагальнюють рівняння дифузії з інерцією*, Вісник Націон. ун-ту "Львівська політехніка", сер. прикладна матем. 411 (2000), 221-228.
6. Дронь В.С., Івасишен С.Д., *Властивості фундаментальних розв'язків і теореми єдиності розв'язків задачі Коші для одного класу ультрапараболічних рівнянь*, Укр.мат.журн. 50 (1998), по. 11, 1482-1496.
7. С.Д. Івасишен, Л.М. Андросова, *Про інтегральне зображення та початкові значення розв'язків деяких параболічних рівнянь, що вироджуються*, Доп. АН УРСР. Сер. А. Фіз.-мат. та техн. науки 1 (1989), 16-18.
8. С.Д. Івасишен, Л.М. Андросова, *Об интегральном представлении решений одного класса вырожденных параболических уравнений типа Колмогорова*, Дифф. уравнения 27 (1991), по. 3, 479-487.
9. Т. Г. Генчев, *Об ультрапараболических уравнениях*, Доклады АН СССР 151 (1963), по. 2, 265-268.
10. А. М. Ильин, *Об одном классе ультрапараболических уравнений*, Доклады АН СССР 159 (1964), по. 6, 1214-1217.
11. Терсенов С.А., *О краевых задачах для одного класса ультрапараболических уравнений и их приложения*, Матем. сборник 133(175) (1987), по. 4 (8), 539-555.
12. Орлова С.А., *О первой краевой задаче для прямо и обратно ультрапараболического уравнения*, Сибирск. мат. журнал 31 (1990), по. 6, 211-215.
13. В. С. Владимиров, Ю. Н. Дрожинов, *Обобщенная задача Коши для ультрапараболического уравнения*, Изв. АН СССР, серия матем. 1967 (31), 1341-1360.
14. В.В. Карачик, М.Ж. Улукназаров, *Операторное представление решений одной задачи ультрапараболического уравнения*, Вопросы вычисл. и прикладн. матем. - Ташкент, 1983 (72), 60-67.
15. Пятков С.Г., *Разрешимость краевых задач для одного ультрапараболического уравнения, Некласические уравнения и уравнения смешанного типа.* - Новосибир., 1990, р. 182-197.
16. Бокало Н.М., *О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений*, Труды семинара им. И.Г. Петровского 14 (1989), 3-44.
17. С.Д. Івасишен, *О корректной разрешимости некоторых параболических граничных задач без начальных условий*, Дифф.уравн. 14 (1978), по. 2, 361-363.
18. С.Д. Івасишен, *О параболических граничных задачах без начальных условий*, Укр.мат.журн. 34 (1982), по. 5, 547-552.
19. Kováčik O., Rákosník J., *On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$* , Czechosl. Math. J. 41 (1991), no. 4, 592-618.
20. Коддингтон Э. А., Левинсон Н., *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*, М.: Иностр. литература, 1958, р. 474.
21. Ладыженская О.А., *Краевые задачи математической физики*, М.: "Наука", 1973, р. 407.

КРАКОВСКАЯ ПОЛИТЕХНИКА ИМЕНИ ТАДЕУША КОСТЮШКО, ПОЛЬША
 ЛЬВОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ИВАНА ФРАНКА, УКРАИНА
 E-mail address: lawreniu@usk.pk.edu.pl diffeq@mf.franko.lviv.ua